

Méthodes numériques appliquées à la mécanique/*Computational Mechanics*
(Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*)

Calcul d'Interface Affine par Morceaux

Jie Li

Résumé – Une technique numérique de type volume de fluide, que nous appelons Calcul d'Interface Affine par Morceaux (CIAM), est développée pour suivre le mouvement de l'interface. Cette méthode approche l'interface par un segment de droite dans chaque cellule, puis advecte l'interface approchée ainsi obtenue par une méthode lagrangienne. Après avoir testé CIAM sur des exemples simples, nous l'avons intégré dans le code Surfer pour simuler l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

Piecewise Linear Interface Calculation

Abstract – A Volume of Fluid numerical technique, which may be called Piecewise Linear Interface Calculation (PLIC), is developed for tracking the motion of interfaces. This method reconstructs interface by a segment in each cell, and advects it by a lagrangian method. After testing the method on simple examples, we have integrated it in the code Surfer to simulate the Rayleigh-Taylor instability.

Abridged English Version – The volume of fluid (VOF) method has enjoyed a great success since its creation (Noh and Woodward, 1976; Chorin, 1980; Hirt and Nicholls, 1981; Youngs, 1982; Lafaurie *et al.*, 1994; Keller *et al.*, 1994; Zaleski *et al.*, in preparation). In this method, the location of the interface is approximately represented by the volume fraction C_{ij} of fluid 1 in cell i, j . We have $0 < C_{ij} < 1$ in cells cut by the interface and $C_{ij} = 0$ or 1 away from it (*fig. 2a*).

We describe PLIC in 2D on a regular mesh of mesh size h . We use the staggered marker-and-cell (MAC) mesh for the spatial discretization (*fig. 1*). The propagation of the interface is performed in two steps. In the first step, the interface is reconstructed in each cell by a sloped segment. The equation of a segment can be written like (1) by using its normal \mathbf{n} . To approach the local interface normal \mathbf{n} , we have tried several ways and we find that a simple 8 point centred finite difference of C_{ij} [as has been used in Brackbill *et al.* (1992)] gives good results. We then determine the position of the segment by the volume fraction C_{ij} in the cell [equations (2), (3), (4), *fig. 3*; also Ashgriz and Poo (1991)]. The interface is then reconstructed as in figure 2c. Once the interface is reconstructed, the velocity at the interface is calculated by linear interpolation [equation (5), (6)] and the interface is transported by a lagrangian method [equations (7), (8), (9)]. Finally, the volume fraction in each cell is recalculated from the new equations of the interface. The principal advantage of the lagrangien method is that whenever the Courant condition ($\max |u| k/h < 1/2$) is satisfied, the algorithm is stable and satisfies the physical constraint $0 \leq C \leq 1$. To simplify the programming, we advance the interface by a fractional step (*fig. 4*) method: the interface is reconstructed and evolved in each spatial dimension separately.

As a numerical test, we propagate a circular region, in the uniform velocity field (u, v) with a grid 128×128 (*fig. 5a*), in the rotation field $(-y, x)$ with a grid 256×256 (*fig. 5b*), we find a good precision. Finally, we integrate PLIC in the code Surfer (Lafaurie *et al.*, 1994) to simulate the Rayleigh-Taylor instability (*fig. 6*). We observe that the contour is very smooth and that the symmetry is conserved. For other applications of PLIC, see Keller *et al.* (1994) and Zaleski *et al.* (in preparation).

Note présentée par Henri CABANNES.

1. INTRODUCTION. – Les méthodes du type VOF (Volume of Fluid) ont connu un grand succès pour suivre les mouvements complexes d'une interface (Noh and Woodward, 1976; Chorin, 1980; Hirt and Nicholls, 1981; Youngs, 1982; Lafaurie *et al.*, 1994; Keller *et al.*, 1994; Zaleski *et al.*, in preparation). Dans ces méthodes, la donnée qui permet de décrire l'interface est la fraction volumique C_{ij} occupée par un des fluides dans chaque cellule indexée i, j . Ainsi les cellules traversées par l'interface possèdent une fraction volumique non entière $0 < C_{ij} < 1$ (fig. 2a). Ceci rend cette méthode – du moins dans les versions courantes – moins précise que les méthodes de suivi de surface (Glimm *et al.*, 1986), mais lui permet de traiter facilement l'interaction de plusieurs interfaces. Des efforts ont été accomplis pour améliorer la précision ces dernières années : Chorin (1980) améliore SLIC [Simple Line Interface Calculation, Noh and Woodward (1976)]; FLAIR [Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction, Ashgriz and Poo (1981)] reconstruit l'interface par des segments non nécessairement parallèles aux axes; Lafaurie *et al.* (1994) modifie l'algorithme VOF de Hirt et de Nicholls (1981) pour prendre en compte l'incompressibilité et ajouter des limiteurs de flux. Nous proposons une nouvelle technique : Calcul d'Interface Affine par Morceaux (CIAM).

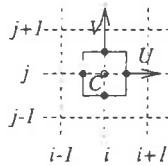


Fig. 1. – Grille de calcul MAC.

Fig. 1. – The MAC mesh.

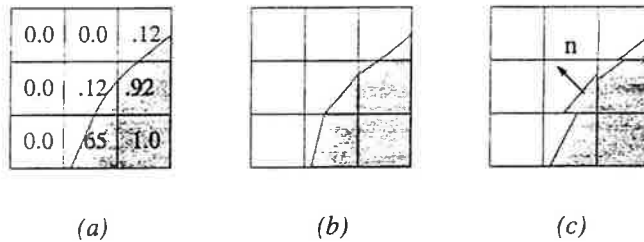


Fig. 2. – (a) Interface réelle et fractions volumiques correspondantes.
(b) Une reconstruction idéale de l'interface. (c) La reconstruction par CIAM.

Fig. 2. – (a) Interface and corresponding volume fractions.
(b) an ideal reconstruction of the interface. (c) The reconstruction by CIAM.

2. MÉTHODE. – Nous illustrons CIAM en 2D sur un maillage carré dont le pas de maille est h . La discrétisation conventionnelle MAC (Marker and Cell) est employée (fig. 1). On représente l'interface en donnant les fractions volumiques correspondantes (fig. 2a). CIAM comporte deux parties : celle de reconstruction de l'interface et celle d'évolution de l'interface. Nous approchons l'interface par un segment dans chaque cellule. Une représentation idéale de l'interface pourrait être une série de segments qui se raccordent sur les bords des cellules (fig. 2b), mais c'est en pratique difficilement réalisable car cela impose trop de contraintes sur la reconstruction. En inspectant les fractions volumiques des cellules voisines, CIAM calcule d'abord une approximation de la direction normale \mathbf{n} de l'interface. Nous avons essayé plusieurs approximations et nous trouvons qu'une simple différence finie centrée de 8 points de C_{ij} [comme a été utilisée dans Brackbill *et al.* (1992)] donne de bons résultats. Nous ajustons alors la position du segment pour

que la fraction volumique soit égale à la valeur prescrite (fig. 2c). Plus précisément, considérons une cellule carrée de longueur unité dont l'origine est en (0, 0). Le segment de direction normale (m, n) appartient à la famille des droites parallèles dont l'équation s'écrit comme suit :

$$(1) \quad m \cdot x + n \cdot y = \alpha$$

où α est un paramètre à déterminer. Après quelques opérations de symétrie, nous pouvons toujours supposer que $0 < m \leq n$. Les segments de direction normale (m, n) qui passent par le point (1, 0) ou (0, 1) donnent lieu à deux fractions volumiques critiques $C_1 = m/(2n)$ et $C_2 = 1 - C_1$ (fig. 3a) qui induisent trois formules pour α [fig. 3b, c, d; voir Ashgriz et Poo (1991)] :

$$(2) \quad \alpha = \sqrt{2Cmn} \quad \text{si } 0 \leq C \leq C_1$$

$$(3) \quad \alpha = (2Cn + m)/2 \quad \text{si } C_1 < C < C_2$$

$$(4) \quad \alpha = m + n - \sqrt{2(1 - C)mn} \quad \text{si } C_2 \leq C \leq 1$$

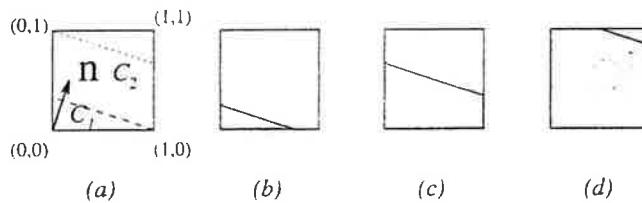


Fig. 3. – Trois types de segments possibles dans une cellule pour le cas $0 < m \leq n$.
 Fig. 3. – Three types of possible segment in a cell for the case $0 < m \leq n$.

Une fois l'interface reconstruite, celle-ci est advectée par une méthode lagrangienne, dans laquelle la vitesse sur l'interface est calculée par interpolation linéaire. Soit A un point dans la cellule indexée i, j dont les coordonnées normalisées par h sont $(x, y) \in [0, 1]^2$, les interpolations de la vitesse sont :

$$(5) \quad u = (1 - x) u_{i-1/2, j} + x u_{i+1/2, j}$$

$$(6) \quad v = (1 - y) v_{i, j-1/2} + y v_{i, j+1/2}$$

On aboutit à deux applications affines pour les nouvelles coordonnées (x', y') de A :

$$(7) \quad x' = (1 - u_{i-1/2, j} k/h + u_{i+1/2, j} k/h) x + u_{i-1/2, j} k/h$$

$$(8) \quad y' = (1 - v_{i, j-1/2} k/h + v_{i, j+1/2} k/h) y + v_{i, j-1/2} k/h$$

où k est le pas de temps. La nouvelle équation de l'interface est alors

$$(9) \quad m'x + n'y = \alpha'$$

où

$$\begin{aligned} m' &= m/(1 - u_{i-1/2, j} k/h + u_{i+1/2, j} k/h), \\ n' &= n/(1 - v_{i, j-1/2} k/h + v_{i, j+1/2} k/h), \\ \alpha' &= \alpha + m' u_{i-1/2, j} k/h + n' v_{i, j-1/2} k/h. \end{aligned}$$

Le champ de fraction volumique est finalement recalculé à partir de ces nouvelles équations d'interface. La figure 4 montre le fonctionnement de la méthode pour le champ de vitesse uniforme $\mathbf{u} = (1, 0)$, $k = h/2$:

(a) on reconstruit l'interface par un segment dans les cellules ayant une fraction volumique non entière.

(b) on fait avancer l'interface par la méthode lagrangienne, en connaissant les équations des segments S_1 et S_2 , on calcule la fraction volumique de la cellule du centre,

(c) on reconstruit l'interface à l'aide du nouveau champ de fraction volumique.

Pour simplifier la programmation, nous avons choisi de faire avancer l'interface par une méthode de pas fractionnaire comportant deux étapes : une première étape, où on reconstruit l'interface pour un déplacement dans la direction x ; une seconde étape, en faisant de même pour la direction y . Dans le cas des interfaces parallèles à la direction du mouvement, CIAM a un effet de régularisation et pour celles qui sont perpendiculaires, CIAM a un effet anti-diffusif.

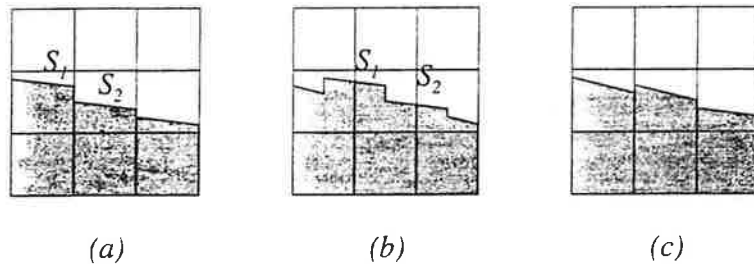


Fig. 4. - Une interface advectée par le champ de vitesse $\mathbf{u} = (1, 0)$, $k = h/2$.

Fig. 4. - An interface advected by the velocity field $\mathbf{u} = (1, 0)$, $k = h/2$.

Lorsque la condition de Courant $(\max |u|) k/h < 1/2$ est vérifiée, CIAM est stable et satisfait la contrainte physique de la fraction volumique $0 \leq C \leq 1$; CIAM s'applique tant aux écoulements incompressibles qu'aux écoulements compressibles. Une étude numérique de la performance de CIAM montre que $T \sim \text{Cte} \times N$, où T est le temps de calcul, N le nombre de cellules. Le programme se vectorise automatiquement sur CRAY et une version sur machine SPI a été réalisée par R. Scardovelli et G. Zanetti.

3. RÉSULTATS NUMÉRIQUES. - Comme test simple (fig. 5 a), nous déplaçons un domaine circulaire dans le champ de vitesse uniforme $\mathbf{u} = (1, 1)$, $k = h/2$, le maillage est de 128×128 . On constate que le cercle est déplacé avec une bonne précision. Un test plus difficile consiste à utiliser le champ de rotation $\mathbf{u} = (-y, x)$. La figure 5 (b) (le

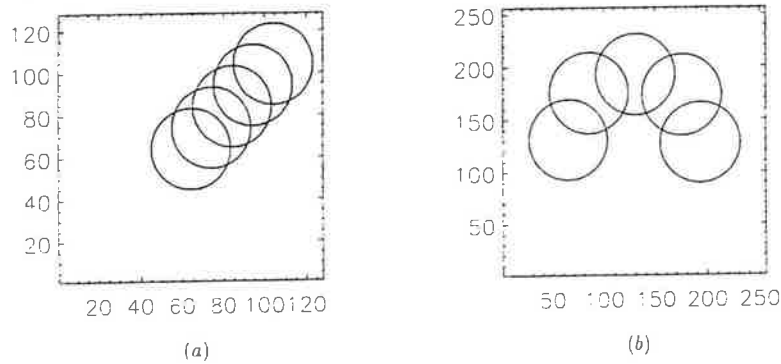


Fig. 5. – Propagation d'un cercle. (a) dans le champ de vitesse constante $\mathbf{u} = (1, 1)$,
(b) dans le champ de rotation $\mathbf{u} = (-y, x)$.

Fig. 5. – Propagation of a circle. (a) in the velocity field $\mathbf{u} = (1, 1)$,
(b) in the velocity field $\mathbf{u} = (-y, x)$.

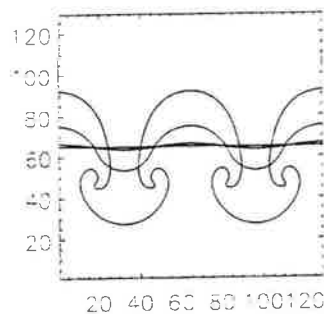


Fig. 6. – Instabilité de Rayleigh-Taylor.

Fig. 6. – Rayleigh-Taylor instability.

maillage est de 256×256) montre que la forme circulaire est bien conservée à la précision d'impression près.

Nous avons généralisé CIAM en 3D et les résultats pour ces mêmes tests sont aussi bons qu'en 2D. Enfin, nous avons intégré CIAM dans le code Surfer (le lecteur est invité à consulter Lafaurie *et al.*, 1994 pour la partie Navier-Stokes) pour simuler l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Une perturbation sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = L/2$ est initiée. Les paramètres physiques sont : $\rho_{\text{gaz}} = 0.5$, $\rho_{\text{liq}} = 1$, $\eta_{\text{gaz}} = 0.0003$, $\eta_{\text{liq}} = 0.003$, $L = 1$, $g = -9.8$, où ρ est la densité, η la viscosité et L la longueur de la boîte. La figure 6 montre les contours sur les valeurs $C=0.4, 0.5, 0.6$, aux temps $t=0, 1, 2, 3$. Le maillage a une taille de 128×128 . Nous constatons que le contour est bien lisse et que la symétrie est conservée.

4. CONCLUSION. – Une nouvelle technique de reconstruction et d'advection d'interface a été développée pour suivre l'interface. Son couplage avec le code Surfer (Lafaurie *et al.*, 1994) nous a permis de simuler avec succès des problèmes difficiles en mécanique des fluides, comme l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Pour d'autres applications de CIAM, voir Keller *et al.* (1994) et Zaleski *et al.* (en préparation).

L'auteur tient à remercier S. Zaleski pour avoir dirigé ce travail avec compétence. Z. M. Wu et G. Zanetti pour leurs discussions et Ph. Autesserre pour la lecture du manuscrit.

Note remise le 10 novembre 1994, acceptée après révision le 6 février 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- N. ASHGRIZ et J. Y. POO, FLAIR, Flux Line-Segment Model for Advection and Interface Reconstruction, *J. Comp. Phys.*, 93, 1991, p. 449-468.
- J. U. BRACKBILL, D. B. KOTHE et C. ZEMACH, A Continuum Method for Modeling Surface Tension, *J. Comp. Phys.*, 100, 1992, p. 335-354.
- A. J. CHORIN, Flame Advection and Propagation Algorithms, *J. Comp. Phys.*, 35, 1980, p. 1.
- J. GLIMM, O. McBRYAN, R. MENIKOFF et D. H. SHARP, Front tracking applied to Rayleigh-Taylor Instability, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, 1986, p. 230-251.
- C. W. HIRT et B. D. NICHOLLS, Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of free Boundaries, *J. Comp. Phys.*, 39, 1981, p. 201-225.
- F. X. KELLER, J. LI, A. VALLET, D. VANDROMME et S. ZALESKI, Direct numerical simulation of interface breakup and atomisation, p. 56-62, *Proc. Sixth Inst. Conf. On Liquid Atomization and Spray Systems*, A. J. YULE et C. DUMOUCHEL, éd., Rouen, July 1994.
- B. LAFAURIE, C. NARDONE, R. SCARDOVELLI, S. ZALESKI ET G. ZANETTI, Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER, *J. Comp. Phys.*, 113, 1994, p. 134-147.
- W. F. NOH et P. WOODWARD, The SLIC (Simple Line Interface Calculation) Method, Lawrence Livermore Laboratory report UCRL-52111, 1976.
- D. L. YOUNGS, Time-Dependent Multi-Material Flow with large Fluid Distortion, in *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, K. W. MORTON et M. J. BAINES, éd., Academic Press, New York, 1982, p. 27.
- S. ZALESKI, J. LI et S. SUCCI, New liquid droplet deformation and break up mechanisms in fluid flows (en préparation).

Laboratoire de Modélisation en Mécanique, CNRS URA 229,
Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75000 Paris, France.
E-mail: li@laplace.lmm.jussieu.fr